

# 15 الدرس

## قابلية القسمة والموافقات

### 1. قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

#### 1.1 مضاعف عدد صحيح

القول أن العدد الصحيح  $m$  مضاعف للعدد الصحيح  $b$  يعني أنه يوجد عدد صحيح  $c$  بحيث  $m = b \cdot c$

#### مثال -

مضاعفات العدد 5 هي من الشكل  $5 \times c$  مع  $c$  عدد صحيح.  
العددان 25 و -135 مضاعفات للعدد 5 لأن  $25 = 5 \times 5$  و  $-135 = 5 \times (-27)$

#### 2.1 علاقة قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

القول أن العدد الصحيح  $b$  يقسم العدد الصحيح  $a$  يعني أنه يوجد عدد صحيح  $c$  بحيث  $a = b \times c$

وفي هذه الحالة نقول أن  $b$  قاسم لـ  $a$  و  $a$  قابل للقسمة على  $b$ .

#### ملاحظة

- كل عدد صحيح يقسم الصفر، لكن الصفر لا يقسم أي عدد صحيح غير معلوم
- العددان -1 و 1 يقسمان كل الأعداد الصحيحة.
- إذا كان لدينا  $a = m \cdot q$  فإن  $m$  و  $q$  قاسمان للعدد  $a$ .

#### مثال -

- العدد 4 يقسم 24 لأن  $24 = 4 \times 6$
- العددان 4 و 6 قاسمان للعدد 24
- العدد 5 يقسم 35 لأن  $35 = (-7) \times (-5)$
- العددان -5 و -7 قاسمان للعدد 35

#### 3.1 خواص قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

(أ) إذا كان  $b$  يقسم  $a$  فإن  $-b$  يقسم  $a$  لأن:  
من المساواة  $a = b \cdot c$   
نستنتج أن:  $a = (-b) \cdot (-c)$

(ب) إذا كان  $b$  يقسم  $a$  مع  $a \neq 0$  فإن  $|a| \leq |b|$  لأن:  
للمساواة  $a = b \times c$  تستلزم  $|a| = |b| \cdot |c|$  وبما أن  $a \neq 0$  فإن  $|c| \neq 0$   
وعليه  $|b| \leq |a|$

(ج) إذا كان  $a$  يقسم  $b$  و  $b$  يقسم  $a$  فإن  $a = b$  أو  $a = -b$  مع  $a \neq 0$  و  $b \neq 0$   
لأن في هذه الحالات  $|a| \geq |b|$  و  $|b| \geq |a|$  إذن  $|b| = |a|$   
أي  $a = b$  أو  $a = -b$

(د) إذا كان  $a$  يقسم  $b$  و  $b$  يقسم  $c$  فإن  $a$  يقسم  $c$  لأن:  
فرضا نستطيع كتابة  $b = a \times p$  و  $c = b \times q$  مع  $p$  و  $q$  عددين صحيحين  
إذن  $c = (a \cdot p) \cdot q = a \cdot (p \cdot q)$  وهذا يعني أن  $a$  يقسم  $c$ .

(هـ) - إذا كان  $a$  يقسم  $b$  فإنه من أجل كل عدد صحيح  $k$ ،  $a$  يقسم  $kb$  و  
(أي  $ka$  يقسم  $kb$ ) لأن:

$a$  يقسم  $b$  هذا معناه أن  $b = a \times p$  ومنه  $kb = k \cdot a \cdot p$  أي  $kb = a(kp)$   
وهذا يعني أن  $a$  يقسم  $kb$ .  
بنفس الطريقة نبين الشرط الثاني من الخاصية.

(و) إذا كان  $a$  يقسم  $b$  و  $c$  فإنه من أجل كل عددين صحيحين  $x$  و  $y$   
لدينا  $a$  يقسم  $bx + cy$  لأن:  
من الفرضية نستطيع كتابة  $b = a \cdot p$  و  $c = a \cdot q$  مع  $p$  و  $q$  عددين صحيحين  
 $bx + cy = a \cdot p \cdot x + a \cdot q \cdot y = a(p \cdot x + q \cdot y)$   
مع  $p \cdot x + q \cdot y$  عدد صحيح إذن  $a$  يقسم  $bx + cy$

#### مثال -

الأعداد  $a, -a, 1, -1$  هي قواسم للعدد غير العدم  $a$ .



## تمرين تدريبي 1

- (1) أوجد كل الثنائيات الطبيعية  $(x, y)$  بحيث  $x^2 + 2xy = 12$  ..... (1)  
(2) عين الأعداد الصحيحة  $n$  بحيث  $n-3$  يقسم  $n+5$

✓ الحل

- (1) من المساواة  $x^2 + 2xy = 12$  نستنتج أن  $x^2 > 0$  و  $x > 0$  وبالتالي فإن قيم  $x$  الممكنة هي 1، 2، 3.  
المساواة (1) تكتب على الشكل  $x(x + 2y) = 12$   
وهذا يعني أن  $x + 2y$  و  $x$  قاسمان للعدد 12

$x$	1	2	3
$x + 2y$	$1 + 2y = 12$	$2 + 2y = 6$	$3 + 2y = 4$
$y$	لا يوجد	2	لا توجد

من أجل كل قيمة لـ  $x$  من  $\{1, 2, 3\}$  نبحث عن الأعداد الطبيعية  $y$  بحيث  $x + 2y$  يقسم 12.  
من الجدول السابق نستنتج أنه توجد ثنائية وحيدة (2, 2) تحقق المساواة (1)

- (2) بما أن  $n-3$  يقسم  $n-3$  و  $n-3$  يقسم  $n+5$  فإن  $n-3$  يقسم  $n+5 - (n-3)$  أي  $n-3$  يقسم 8.  
إذن  $n-3$  ينتمي إلى قواسم العدد 8 والتي هي 1، -1، 2، -2، 4، -4، 8، -8

$n-3$	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8
$n$	4	5	7	11	2	1	-1	-5

وبالتالي  $n$  ينتمي إلى  $\{4, 5, 7, 11, 2, 1, -1, -5\}$

## تمرين تدريبي 2

- $b = 8k + 3$  و  $a = 6k + 5$  أعداد طبيعية بحيث  $a, b, k$  بين أن القاسمين الوحيدين المشتركين والمركبين للعددين  $a$  و  $b$  هما 1 و 11

✓ الحل

ليكن  $d$  قاسم مشترك للعددين  $a, b$   
بما أن  $d$  يقسم  $a$  و  $d$  يقسم  $b$  فإن  $d$  يقسم  $b - a = 3 - 4 = -1$  أي  $d$  يقسم 1  
وبما أن قواسم 1 في  $\mathbb{N}$  هي 1 و 11 فإن  $d$  له قيمتين ممكنتين هما 1 و 11

## 2. القسمة الإقليدية

### 1.2 القسمة الإقليدية في $\mathbb{N}$

مبرهنة

$a$  و  $b$  عدنان طبيعيين مع  $b \neq 0$   
توجد ثنائية وحيدة  $(q, r)$  من الأعداد الطبيعية بحيث  $a = bq + r$  و  $b > r \geq 0$

الإنبات

بما أن  $b$  موجب تماما فإن المضاعفات الموجبة للعدد  $d$  تشكل متتالية متزايدة تماما، لنكتب مضاعفات  $d$  من الصفر حتى  $(a+1)b$   
لدينا  $b \geq 1$  وعليه  $a \geq (a+1)b$   
إذن بالضرورة يكون  $a$  هو أحد مضاعفات  $b$  أو يكون محصورا بين مضاعفين متتاليين للعدد  $b$  أي  $a \in [qb, (q+1)b]$   
وبالتالي نستطيع كتابة  $a$  على الشكل  $a = bq + r$  حيث  $r$  هي المسافة بين  $a$  و  $bq$ ، لكن هذه المسافة  $r$  هي أصغر تماما من الطول  $b$  إذن  $b > r \geq 0$

وحداية الثنائية  $(q, r)$ :

نفرض أنه توجد ثنائيتين  $(q_1, r_1)$  و  $(q_2, r_2)$   
بحيث  $a = q_1b + r_1$  و  $a = q_2b + r_2$  مع  $b > r_1 \geq 0$  و  $b > r_2 \geq 0$   
ومنه ينتج  $(q_1 - q_2)b = r_2 - r_1$  ..... (\*)  
من (\*) نستنتج أن  $b$  يقسم  $r_2 - r_1$  وبما أن  $r_2 - r_1 < b$  فإن  $r_2 - r_1 = 0$  أي  $r_2 = r_1$   
وبالتعويض في (\*) نجد  $q_1 - q_2 = 0$  أي  $q_1 = q_2$   
إذن الثنائية  $(q, r)$  وحيدة.

تعريف

إجراء القسمة الإقليدية في المجموعة  $\mathbb{N}$  للعدد الطبيعي  $a$  على العدد الطبيعي  $b$  مع  $b \neq 0$  هي إيجاد الثنائية الطبيعية  $(q, r)$  بحيث  $a = bq + r$  مع  $b > r \geq 0$ ، يسمى  $q$  حاصل هذه القسمة و  $r$  باقيا و  $b$  القاسم و  $a$  المقسوم.

مثال -

القسمة الإقليدية لـ 12 على 5 هي  $12 = 5 \times 2 + 2$  حيث  $5 > 2 \geq 0$   
القسمة الإقليدية لـ 23 على 5 هي  $23 = 5 \times 4 + 3$  حيث  $5 > 3 \geq 0$   
القسمة الإقليدية لـ 31 على 50 هي  $31 = 50 \times 0 + 31$



نتيجة

- إذا كان  $b$  عددا طبيعيا معطى فإن كل عدد طبيعي  $n$  يمكن كتابته على الشكل  $n = bq + r$  مع  $r \in \{0, 1, \dots, b-1\}$  ومنه فإن بواقي القسمة الممكنة في القسمة الإقليدية لـ  $n$  على  $b$  هي  $0, 1, \dots, b-1$ .  
- القول أن  $b$  يقسم  $a$  يكافئ القول أنه في القسمة الإقليدية لـ  $a$  على  $b$  يكون الباقي معدوما.

مثال -

كل عدد طبيعي  $n$  يكتب  $5p$  أو  $5p+1$  أو  $5p+2$  أو  $5p+3$  أو  $5p+4$  مع  $p$  عدد طبيعي  
كل عدد طبيعي  $n$  يكتب أيضا  $4p$  أو  $4p+1$  أو  $4p+2$  أو  $4p+3$  مع  $p$  عدد طبيعي.

2 - 2 القسمة الإقليدية في  $\mathbb{Z}$

مرهنة

$a$  و  $b$  عدنان صحيحان مع  $b \neq 0$  عندئذ يوجد عدد صحيح وحيد  $q$  و عدد طبيعي وحيد  $r$  بحيث  $a = bq + r$  و  $|r| < |b|$ .

الإثبات

نثبت هذه المبرهنة في حالة  $b$  موجب و  $a$  صحيح سالب.

نضع  $a' = -a$  مع  $a'$  عدد طبيعي موجب

بما أن  $a'$  و  $b$  موجبان فإن القسمة الإقليدية لـ  $a'$  على  $b$  تعطى لنا  $a' = q'b + r'$

وبالضرب في  $(-1)$  نجد  $-a' = -q'b - r'$  أي  $a = -q'b - r'$

نضيف  $b - b$  إلى الطرف الثاني نجد  $a = -q'b - r' + b - b$

أي  $a = -(q'+1)b + b - r'$

وبوضع  $b - r' = r$  و  $-(q'+1) = q$  فإن المساواة الأخيرة تصبح  $a = bq + r$

بما أن  $0 \leq r' < b$  فإن  $b - r' \geq 0$

مثال -

(1)  $a = 35$  و  $b = -9$

القسمة الإقليدية لـ 35 على 9 تعطي  $35 = 9 \times 3 + 8$  أي  $35 = (-9)(-3) + 8$

وبالتالي  $q = -3$  و  $r = 8$

(2)  $a = -35$  و  $b = -9$

$-35 = -9 \times 3 - 8 = -9 \times 3 - 8 + 9 - 9 = -9 \times 4 + 1 = 9(-4) + 1$

إذن  $q = -4$  و  $r = 1$

تمرين تدريبي 1

أوجد كل الأعداد الطبيعية  $n$  بحيث إذا قسمت على 4 يكون الباقي يساويا للحاصل.

✓ الحل

لدينا  $n = 4r + r$  مع  $r \geq 0$  إذن  $n = 5r$  مع  $r \geq 0$

إذن قيم  $r$  هي 0, 1, 2, 3

وبالتالي قيم  $n$  هي 0, 5, 10, 15

تمرين تدريبي 2

$n$  عدد طبيعي. بين أنه مهما يكن العدد الطبيعي  $n$  فإن العدد  $3n^4 + 5n + 1$  يكون فرديا وأنه لا يقبل القسمة على  $n(n+1)$

✓ الحل

كل عدد طبيعي  $n$  يمكن كتابته على الشكل:  $2p$  أو  $2p+1$  حيث  $p$  عدد طبيعي

- إذا كان  $n = 2p$  فإن  $3n^4$  زوجي و  $5n$  زوجي

وبالتالي  $3n^4 + 5n + 1$  فرديا

- إذا كان  $n = 2p+1$  فإن  $n^4$  يكون فرديا وبالتالي  $3n^4$  فرديا

إذن العدد  $3n^4 + 5n + 1$  فرديا (مجموعة ثلاثة أعداد فردية يساوي عدد فردي)

إذن مهما يكن العدد الطبيعي  $n$  فإن  $3n^4 + 5n + 1$  يكون عددا فرديا.

- القسمة الإقليدية للعدد  $3n^4 + 5n + 1$  على العدد  $n(n+1)$  تعطي لنا:

$$3n^4 + 5n + 1 = (n^2 + n)(3n^2 - 3n + 3) + 2n + 1$$

نفرض أن  $n(n+1)$  يقسم  $3n^4 + 5n + 1$  وبما أن  $n(n+1)$  يقسم

$(n^2 + n)(3n^2 - 3n + 3)$  فإن  $n(n+1)$  يقسم  $2n + 1$  وهذا تناقض كون  $n(n+1)$

زوجي و  $2n + 1$  فردي

إذن  $n(n+1)$  لا يقسم  $3n^4 + 5n + 1$ .

تمرين تدريبي 3

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $n(n^2 - 1)$  مضاعف لـ 2 ومضاعف لـ 3

✓ الحل

نضع  $d = n(n^2 - 1)$  وبما أن  $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$  فإن  $d = n(n-1)(n+1)$

- نثبت أن  $d$  مضاعف لـ 2،



- بما أن  $n(n-1)$  زوجي فإن  $d$  عدد زوجي لأن جداء عدد زوجي مع أي عدد آخر يكون زوجيا.  
 - نثبت أن  $d$  مضاعف لـ 3:  
 كل عدد طبيعي  $n$  يمكن كتابته على الشكل  $3p$  أو  $3p+1$  أو  $3p+2$  مع  $p$  عدد طبيعي.  
 إذا كان  $n=3p$  فإن  $d=3p(9p^2-1)$  فهو إذن مضاعف لـ 3  
 إذا كان  $n=3p+1$  فإن  $d=3[p(3p+1)(3p+2)]$  ومنه نستنتج أن  $d$  مضاعف لـ 3.  
 إذا كان  $n=3p+2$  فإن  $d=3[(p+1)(3p+1)(3p+2)]$  ومنه نستنتج أن  $d$  مضاعف لـ 3.  
 إذن مهما يكن  $n$  فإن  $d$  مضاعف لـ 3.

### 3. الموافقة بترديد $m$

#### تعريف

$m$  عدد طبيعي أكبر تماما من الصفر.  
 القول أن العددين الصحيحين  $a$  و  $a'$  متوافقان بترديد  $m$  يعني أن لهما نفس القسمة الإقليدية على  $m$

#### مبرهنة

$a$  و  $a'$  عدنان صحيحان متوافقان بترديد  $m$  يكافئ  $a' - a$  يقبل القسمة على  $m$ .

#### الإثبات

- نفرض أن  $a$  و  $a'$  نفس باقي القسمة على  $m$  بحيث  $a = mq + r$  و  $a' = mq' + r$   
 بالطرح نجد  $a' - a = m(q' - q)$  وهذا يعني أن  $a' - a$  يقبل القسمة على  $m$   
 - نفرض أن  $a' - a$  يقبل القسمة على  $m$  إذن يوجد عدد صحيح  $k'$  بحيث  $a' - a = k'm$   
 نقسم  $a$  على  $m$  فنجد  $a = mk + r$  مع  $0 \leq r < m$   
 لكن  $a' = a + k'm$  إذن  $a' = m(k + k') + r$  مع  $0 \leq r < m$  إذن باقي قسمة  $a'$  على  $m$  هو  $r$ .

#### ترميز

إذا كان  $a$  و  $a'$  متوافقان بترديد  $m$  نكتب  $a' \equiv a [m]$   
 ويقرأ " $a'$  يوافق  $a$  بترديد  $m$ "

#### مثال -

- $21 \equiv 1 [2]$  لأن  $21 - 1 = 20$  يقبل القسمة على 2  
 $15 \equiv -1 [4]$  لأن  $15 - (-1) = 16$  يقبل القسمة على 4  
 $-1 \equiv 1 [2]$  لأن  $-1 - 1 = -2$  يقبل القسمة على 2

#### ملاحظة

- (1) إذا كان  $r$  باقي قسمة  $a$  على  $m$  فإن  $a \equiv r [m]$   
 (2)  $a \equiv 0 [m]$  يعني أن  $a$  يقبل القسمة على  $m$

### خواص للموافقة

- (1) مهما كان التردد فإن  $a \equiv a$   
 (2) إذا كان  $a \equiv b [m]$  وإذا كان  $b \equiv c [m]$  فإن  $a \equiv c [m]$   
 (3) إذا كان  $a \equiv b [m]$  و  $a' \equiv b' [m]$  فإن:  
 $a + a' \equiv b + b' [m]$  و  $a - a' \equiv b - b' [m]$  و  $a \cdot a' \equiv b \cdot b' [m]$   
 (4) إذا كان  $a \equiv b [m]$  فإن  $a^p \equiv b^p [m]$  حيث  $p$  عدد صحيح موجب.  
 (5) إذا كان  $a$  و  $b$  و  $m$  يقبل القسمة على نفس العدد الطبيعي الموجب  $c$  فإن:

$$a \equiv b [m] \text{ يستلزم } \frac{a}{c} \equiv \frac{b}{c} \left[ \frac{m}{c} \right]$$

#### الإثبات

- (1) .....  $a - b = km$  تكافئ  $a \equiv b [m]$   
 (2) .....  $a' - b' = km'$  تكافئ  $a' \equiv b' [m]$   
 بجمع (1) و (2) نجد  $(a + a') - (b + b') = (k + k')m$   
 وهذا يعني أن  $(a + a') - (b + b')$  يقبل القسمة على  $m$  أي  $a + a' \equiv b + b' [m]$   
 - لدينا:  
 $a \cdot a' - b \cdot b' = a \cdot a' - b \cdot b' - a \cdot b' + a \cdot b' = a(a' - b') + b'(a - b)$   
 $= a \cdot km' + b' \cdot km = m(a \cdot k' + b' \cdot k) = m \cdot k''$   
 ومنه  $a \cdot a' - b \cdot b'$  يقبل القسمة على  $m$  أي  $a \cdot a' \equiv b \cdot b' [m]$

#### نتيجة

- إذا كان  $a \equiv b$  فإنه من أجل كل عدد صحيح  $x$  لدينا:  
 $ax \equiv bx$  و  $a - x \equiv b - x$  و  $a + x \equiv b + x$   
 - إذا كان  $yx \equiv 0 [m]$  فإن  $x \equiv 0 [m]$  أو  $y \equiv 0 [m]$

#### ملاحظة

لدينا  $2 \times 5 = 10 \equiv 4 [6]$  وبالقسمة على 2 نتحصل على  $5 \equiv 2 [6]$   
 أي  $(5 - 2)$  يقبل القسمة على 6 وهذا خطأ.  
 إذن بشكل عام لا تبسط الموافقة بقسمتها على العامل المشترك لكن إذا كان  
 $ab \equiv ac [m]$  و  $a$  و  $m$  أوليين فيما بينهما فإنه ينتج  $b \equiv c [m]$

#### تمرين تدريبي 1

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $n^2 + 6n \equiv 0 [7]$



✓ الحل

بواقي قسمة العدد الطبيعي  $n$  على 7 هي 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6  
الجدول التالي يبين لنا بواقي قسمة كل من  $n^7$  و  $6n$  و  $n^7 + 6n$  على 7

باقي قسمة $n$ على 7	0	1	2	3	4	5	6
باقي قسمة $n^7$ على 7	0	1	2	3	4	5	6
باقي قسمة $6n$ على 7	0	6	5	4	3	2	1
باقي قسمة $n^7 + 6n$ على 7	0	0	0	0	0	0	0

مثال لكيفية ملء هذا الجدول

إذا كان  $n = 2[7]$  فإن :

$$6n = 12[7] \text{ أي } 6n \equiv 5[7]$$

$$n^7 = 2^7[7] \text{ أي } n^7 \equiv (2^3)^2 \times 2[7] \text{ لكن } (2^3)^2 \equiv 1[7] \text{ إذن } n^7 \equiv 2[7]$$

نستنتج من الجدول أنه مهما كان  $n$  فإن باقي قسمة  $n^7 + 6n$  مضاعف للعدد 7

$$\text{أي } n^7 + 6n \equiv 0[7]$$

تمرين تدريبي 2

أوجد باقي القسمة الإقليدية على العدد 7 لكل من العددين :

$$(أ) 1416 + 713 \quad (ب) 219^{20}$$

✓ الحل

$$\begin{array}{r} 713 \\ 013 \overline{) 713} \\ 7 \phantom{00} \\ \hline 0 \phantom{00} \end{array} \quad \text{و} \quad \begin{array}{r} 1416 \\ 016 \overline{) 1416} \\ 16 \phantom{00} \\ \hline 0 \phantom{00} \end{array}$$

$$\text{إذن } 713 = 6[7] \text{ و } 1416 = 2[7] \text{ ومنه نستنتج } 1416 + 713 = 8[7]$$

$$\text{بما أن } 8 = 1[7] \text{ فإن } 1416 + 713 = 1[7]$$

(ب) لإيجاد باقي قسمة  $a^n$  على  $m$  نبدأ في البحث عن باقي قسمة  $a$  على  $m$ .

$$\begin{array}{r} 219 \\ 09 \overline{) 219} \\ 18 \phantom{00} \\ \hline 39 \phantom{00} \\ 36 \phantom{00} \\ \hline 3 \phantom{00} \end{array} \quad \text{ومنه } 219 = 2[7] \text{ وبما أن } 219 = 2[7] \text{ فإن } 219^{20} = 2^{20}[7]$$

إذن العملية آلت إلى البحث عن باقي قسمة  $2^{20}$  على 7

$$\text{لكن } 2 \equiv 2[7], 2^2 \equiv 4[7] \text{ و } 2^3 \equiv 1[7]$$

إذن متتالية البواقي دورية ودورها 3.

$$\text{لأن } 2^1 = 2[7], 2^2 = 2^2[7], 2^3 = 2^3[7] = 1 \text{ ، } 2^6 = (2^3)^2 = 1 \text{ إذن :}$$

$$\text{- إذا كان } n = 3p \text{ فإن } 2^n = 1$$

$$\text{- إذا كان } n = 3p+1 \text{ فإن } 2^n = 2$$

$$\text{- إذا كان } n = 3p+2 \text{ فإن } 2^n = 4$$

$$\text{بما أن } 20 = 3 \times 6 + 2 \text{ أي } 20 = 3p+2 \text{ مع } p=6 \text{ فإن } 2^{20} = 4[7] \text{ إذن } 2^{19} \equiv 4[7]$$

تمرين تدريبي 3

$n$  عدد طبيعي لا يقبل القسمة على 5

(1) ما هي بواقي قسمة  $n$  على 5 ؟ ثم اكتب الموافقات المقابلة للبواقي .

(2) عين في شكل حالة من الحالات السابقة الموافقات بتزايد للعدد  $1 - n^4$  :

ثم ماذا تستنتج حول قابلية القسمة للعدد  $1 - n^4$  على 5 ؟

✓ الحل

(1) بواقي قسمة أي عدد طبيعي على 5 هي 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4

وبما أن  $n$  ليست مضاعف لـ 5 فإن القيمة 0 مرفوضة . وبالتالي البواقي الممكنة هي

$$1, 2, 3, 4.$$

الموافقات المقابلة لهذه البواقي هي  $n \equiv 1[5], n \equiv 2[5], n \equiv 3[5], n \equiv 4[5]$

(2) إذا كان  $n \equiv 1[5]$  فإن  $n^4 \equiv 1[5]$  وبالتالي  $n^4 - 1 \equiv 0[5]$

إذا كان  $n \equiv 2[5]$  فإن  $n^4 \equiv 2^4[5]$  أي  $n^4 \equiv 1[5]$  وبالتالي  $n^4 - 1 \equiv 0[5]$

إذا كان  $n \equiv 3[5]$  فإن  $n^4 \equiv 3^4[5]$  أي  $n^4 \equiv 1[5]$  وبالتالي  $n^4 - 1 \equiv 0[5]$

إذا كان  $n \equiv 4[5]$  فإن  $n^4 \equiv 4^4[5]$  أي  $n^4 \equiv 1[5]$  وبالتالي  $n^4 - 1 \equiv 0[5]$

نستنتج مما سبق أنه إذا كان  $n$  ليس مضاعفا لـ 5 فإن العدد  $n^4 - 1$  مضاعف لـ 5

#### 4. أنظمة التعداد

إفراح نظام تعداد هو إعطاء طريقة تسمح لنا بكتابة الأعداد بواسطة عدد منته من الرموز ،

ونظام التعداد المشهور هو النظام العشري الذي يسمح بكتابة كل الأعداد باستعمال الأرقام

العشرة 0، 1، 2، .....، 9.

#### 1.4 نشر عدد طبيعي $N$

مقدمة

من أجل كل عدد طبيعي  $N$  موجب تماما ومن أجل كل عدد طبيعي  $x$  يوجد



نشر وحيد للعدد  $N$  بحيث  $N = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  حيث  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  أعداد طبيعية أصغر من  $x$  و  $a_n \neq 0$

#### الإثبات

القسمة الإقليدية للعدد  $N$  على  $x$  تعطي لنا  $N = R_1 x + a_0$  حيث  $a_0$  باقي القسمة و  $R_1$  حاصل القسمة. وبما أن الثنائية  $(R_1, a_0)$  وحيدة فإن هذا النشر وحيد. بقسمة  $R_1$  على  $x$  نجد  $R_1 = R_2 x + a_1$  إذن  $N = (R_2 x + a_1) x + a_0 = a_0 + a_1 x + R_2 x^2$  بقسمة  $R_2$  على  $x$  نجد  $R_2 = R_3 x + a_2$  ومنه يكون  $N = a_0 + a_1 x + (R_3 x + a_2) x^2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + R_3 x^3$  وهكذا دواليك حتى نصل إلى حاصل قسمة  $R_{n+1}$  على  $x$  معلوم وفي هذه الحالة يكون  $N = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

#### مثال -

$N = 32$  و  $x = 3$  لدينا النشر التالي:  
 $N = 2 \times 3^0 + 1 \times 3^1 + 0 \times 3^2 + 1 \times 3^3$

#### ترميز

إذا كان  $x^n$  حيث  $N = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$  أعداد طبيعية و  $a_n \neq 0$  ومن أجل كل  $i \in [0, n]$  يكون  $a_i$  فإنه يمكننا أن نرمز للعدد  $N$  كالتالي:  
 $N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$  أو  $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$  وفي هذه الحالة نقول أننا كتبنا  $N$  في نظام تعداد أساسه  $x$ .

#### مثال -

- (1) النظام الثنائي هو نظام أساسه 2 وأرقامه 0 و 1  
فمثلا العدد 10 يكتب في هذا النظام ب 1010 والعدد 2 يكتب في هذا النظام ب 10
- (2) النظام الرباعي هو نظام أساسه 4 وأرقامه 0، 1، 2، 3  
العدد 4 في هذا النظام يكتب 10
- (3) النظام الحادي عشر هو نظام أساسه 11 وأرقامه 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9،  $\alpha$  حيث  $\alpha$  تمثل العدد 10
- (4) النظام الثاني عشر هو نظام أساسه 12 وأرقامه 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9،  $\alpha$ ،  $\beta$  حيث  $\beta$  تمثل الرقم 11

### 2.4 الانتقال من الأساس $x$ إلى الأساس $y$

ليكن  $N$  عدد طبيعي غير معلوم مكتوب في نظام التعداد ذي الأساس  $x$  حيث  $x > 1$ .

إذا أردنا كتابة العدد  $N$  في النظام التعداد ذي الأساس  $y$  حيث  $y > 1$  فإننا نكتب  $N$  في النظام ذي الأساس 10 ثم نكتبه في النظام ذي الأساس  $y$ .

#### مثال -

لدينا  $N = 1231^4$  نريد كتابته في النظام ذي الأساس 5.  
 $N = 1 \times 4^0 + 3 \times 4^1 + 2 \times 4^2 + 1 \times 4^3$   
 $= 1 + 12 + 32 + 64 = 109$   
إذن  $N = 109^{10}$   
 $109 = 4 \times 5^0 + 1 \times 5^1 + 4 \times 5^2$   
إذن  $109^{10} = 414^5$

#### ملاحظة

- إذا كان  $y = x^k$  مع  $k \in \mathbb{N}^*$ ، فإنه يمكن الانتقال من التعداد ذي الأساس  $x$  إلى نظام التعداد ذي الأساس  $y$  دون المرور إلى النظام العشري.

#### مثال -

ليكن  $N = 101101^2$  و  $x = 2$  و  $y = 2^3$   
 $N = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5$   
 $= (1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2) \times 8^0 + (1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5) \times 8^1$   
 $= 5 \times 8^0 + 5 \times 8^1 = 55^2$

### 3.4 قابلية القسمة

كل عدد طبيعي  $N > 1$  يكتب على الشكل  $N = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$  مع  $a_n \neq 0$  قابلية القسمة على 2،

$N$  يقبل القسمة على 2 يكافئ  $a_0$  يقبل القسمة على 2

أي  $2 \mid N \iff a_0 \equiv 0 \pmod{2}$  يكافئ  $2 \mid N$

قابلية القسمة على 5،

$5 \mid N \iff a_0 \equiv 0 \pmod{5}$  يكافئ  $5 \mid N$

قابلية القسمة على 3،

$3 \mid N \iff a_0 + a_1 + \dots + a_n \equiv 0 \pmod{3}$  يكافئ  $3 \mid N$

قابلية القسمة على 9،

$9 \mid N \iff a_0 + a_1 + \dots + a_n \equiv 0 \pmod{9}$  يكافئ  $9 \mid N$

قابلية القسمة على 11،

$11 \mid N \iff a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n \equiv 0 \pmod{11}$  يكافئ  $11 \mid N$



- قابلية القسمة على 25 :

$$a_0 + 10 \cdot a_1 \equiv 0 [25] \text{ يكافئ } N \equiv 0 [25]$$

- قابلية القسمة على 4 :

$$a_0 + 2 \cdot a_1 \equiv 0 [4] \text{ يكافئ } N \equiv 0 [4]$$

مثال - ♦

العدد 1236 يقبل القسمة على 3 لأن  $1+2+3+6 \equiv 0 [3]$

العدد 1331 يقبل القسمة على 11 لأن  $1-3+3-1 \equiv 0 [11]$

العدد 1024 يقبل القسمة على 4 لأن  $4+2 \times 2 \equiv 0 [4]$

تمرين تدريبي

A عدد يكتب في النظام السباعي بـ 16524 اكتب هذا العدد في النظام ذي الأساس 12

الحل ✓

يكتب A في النظام العشري

$$\begin{aligned} A &= 4 \times 7^0 + 2 \times 7^1 + 5 \times 7^2 + 6 \times 7^3 + 1 \times 7^4 \\ &= 4 + 14 + 245 + 2058 + 2401 = 4722 \\ \text{إذن } A &= 2896^{12} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 4722 \overline{)12} \\ \underline{6} \phantom{00} 393 \overline{)12} \\ \underline{9} \phantom{00} 32 \overline{)12} \\ \underline{8} \phantom{00} 2 \overline{)12} \\ \underline{2} \phantom{00} 0 \end{array}$$

# تطبيق



تطبيق قابلية القسمة في  $\mathbb{Z}$

1 تطبيق

(1) أوجد كل قواسم 15 في  $\mathbb{Z}$

(2) أوجد كل الثنائيات الطبيعية  $(x, y)$  بحيث  $x^2 - y^2 = 15$  ..... (I)

الحل ✓

(1) لدينا  $15 = 3 \times 5$  ومنه قواسم 15 هي 1، 3، 5، 15

(2) المعادلة (I) تكتب على الشكل  $(x-y)(x+y) = 15$

ومنه نستنتج أن  $x-y$  و  $x+y$  قاسمان لـ 15.

وبما أن  $x+y$  و  $x-y$  فإن  $(x+y)=15$  و  $(x-y)=1$  أو  $x+y=5$  و  $x-y=3$ .

$$\text{إذا كان } \begin{cases} x+y=15 \\ x-y=1 \end{cases} \text{ فإن } \begin{cases} x=8 \\ y=7 \end{cases}$$

$$\text{إذا كان } \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases} \text{ فإن } \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

إذن مجموعة الثنائيات  $(x, y)$  التي تحقق المعادلة (I) هي  $(8, 7)$  و  $(4, 1)$

تطبيق القسمة الاقليدية

2 تطبيق

a عدد طبيعي غير معلوم

علما أن حاصل قسمة 990 على a يساوي 39

(1) اكتب العلاقة التي تترجم هذه القسمة

(2-1) بين أن  $39a \leq 990 < 40a$

(ب) استنتج a وباقي القسمة r.

الحل ✓

(1) العلاقة التي تترجم هذه القسمة هي  $990 = 39a + r$  مع  $r \geq 0$

(2) (1) بما أن  $r \geq 0$  فإن  $990 \geq 39a$  ..... (1)



بما أن  $r < a$  فإن  $39a + r < 40a$  أي  $a > 990$  ..... (2)

من (1) و (2) نجد  $39a \geq 990 > 40a$

ب) من (1) نجد  $a \leq \frac{990}{39}$  أي  $a \leq 25,38$

من (2) نجد  $a > \frac{990}{40}$  أي  $a > 24,75$

إذن  $24,75 < a \leq 25,38$  وبما أن  $a$  عدد طبيعي فإن  $a = 25$

ومنه  $r = 990 - 39 \times 25 = 15$

### تطبيق 3

#### مجموع عددين $a$ و $b$ هو 16 وحاصل باقي القسمة الإقليدية لـ $a$ على $b$ هما على التوالي 2، 1. عيّن $a$ و $b$ .

الحل ✓

لدينا  $a + b = 16$  و  $a = 2b + 1$

بعد تعويض  $a$  في المساواة  $a + b = 16$  نجد  $3b = 15$  ومنه  $b = 5$

إذن  $a = 2 \times 5 + 1 = 11$

### تطبيق 4

#### مجموع عددين $a$ و $b$ عتدنان طبيعيان. في القسمة الإقليدية لـ $a$ على $b$ يكون باقي القسمة $r$ أكبر أو يساوي من حاصل القسمة $q$

(1) بين أنه إذا قسمنا  $a$  على  $b + 1$  فأننا نحصل على نفس حاصل القسمة

(2) إذا علمت أن باقي قسمة  $a$  على 21 هو 14 وباقي قسمته على 22 هو 13 فابحث  $a$ .

الحل ✓

(1) لدينا  $a = qb + r$  مع  $r \geq q$

المساواة  $a = qb + r$  تكتب أيضا على الشكل  $a = q(b + 1) + (r - q)$

أي  $a = q(b + 1) + (r - q)$

بما أن  $r \geq q$  فإن  $r - q \geq 0$

بما أن  $q \geq r$  و  $r < b$  فإن  $q < b + 1$

إذن حاصل قسمة  $a$  على  $b + 1$  هو  $q$

(2) لدينا  $a = 21q + 14$  و  $a = 22q' + 13$

بما أن  $22 = 21 + 1$  و  $14 > q$  فإن  $q = q'$

إذن  $a = 21q + 14$  و  $a = 22q + 13$

ومنه ينتج  $a = 22q + 13 = 21q + 14$  وبعد حل هذه المعادلة نجد  $q = 1$

وبالتالي  $a = 21 \times 1 + 14 = 35$

### تطبيق 5

#### مجموع عددين $a$ و $b$ عتدنان طبيعيان. حاصل وباقي القسمة $a$ على $b$ هما على التوالي $q$ و $r$ نضيف للعدد $a$ عددا صحيحا $h$ .

(1) مثل على محور الأعداد الحقيقية الأعداد  $b(q + 1)$ ،  $bq$ ،  $a$

(2) من أجل أي قيم  $h$  يكون حاصل قسمة  $a + h$  على  $b$  هو  $q$

(3) أوجد قيم  $h$  في حالة  $a = 67$  و  $b = 17$

الحل ✓

(1) لدينا  $a = qb + r$  مع  $r < b$

بإضافة  $b$  إلى طرفي المساواة  $a = qb + r$

نجد  $a + b = b(q + 1) + r$

ومنه ينتج  $a - b(q + 1) = r - b$

وبما أن  $r < b$  فإن  $r - b < 0$

أي  $a - b(q + 1) < 0$

(2) لدينا  $a = qb + r$  وبإضافة  $h$  إلى طرفي المساواة السابقة

نجد  $a + h = bq + r + h$  ..... (1)

ولدينا فرضا (2)  $a + h = bq + r'$  مع  $r' < b$

من (1) و (2) نجد  $r + h = r'$

بما أن  $r' < b$  فإن  $r + h < b$  ومنه ينتج  $h < b - r$

ومنه قيم  $h$  من المجال  $[-r, b - r]$

(3) لدينا  $67 = 3 \times 17 + 16$  ومنه  $r = 16$  وبالتالي  $h \in [-16, 1]$

### تطبيق 6

#### مجموع عددين $a$ و $b$ عتدنان طبيعيان. تعيين باقي القسمة باستعمال الموافقة

(1) بين أن  $5^4 \equiv 1 [13]$  و  $5^2 \equiv -1 [13]$

(2)  $k$  عدد طبيعي بين أن  $5^{4k} \equiv 1 [13]$  ثم استنتج باقي قسمة العدد

$148^{2007}$  على 13







$$\begin{cases} 3^{3n+1} = 3 \pmod{13} \\ 3^1 = 3 \pmod{13} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{إذن } 3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1 &= 9 + 3 + 1 \pmod{13} \\ 3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1 &\equiv 13 \pmod{13} \\ 3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1 &\equiv 0 \pmod{13} \end{aligned}$$

## تطبيق 10 تعيين باقي قسمة القوى الطبيعية لعدد

- (1) برهن بالزجاج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  يكون العدد  $2^{3n} - 1$  قابلاً للقسمة على 7  
(2) استنتج أن العددين  $2^{3n+1} - 2$  و  $2^{3n+2} - 4$  يقبلان القسمة على 7  
(3) عين باقي قسمة قوى العدد 2 على 7.

✓ الحل

- (1) نسمي  $p_n$  الخاضية " $2^{3n} - 1$  يقبل القسمة على 7"  
 $P_0$  صحيحة لأن  $2^{3 \cdot 0} - 1 = 0$  و 0 يقبل القسمة على 7  
نفرض أن  $p_n$  صحيحة أي  $2^{3n} - 1$  يقبل القسمة على 7  
ونبرهن أن  $p_{n+1}$  صحيحة أي  $2^{3(n+1)} - 1$  يقبل القسمة على 7  
$$\begin{aligned} 2^{3(n+1)} - 1 &= 2^{3n+3} - 1 = 2^{3n} \times 8 - 1 \\ &= 2^{3n}(1+7) - 1 \\ &= 2^{3n} - 1 + 7 \times 2^{3n} \end{aligned}$$
  
بما أن  $2^{3n} - 1$  و  $7 \times 2^{3n}$  يقبلان القسمة على 7 فإن مجموعهما يقبل القسمة على 7  
أي  $2^{3(n+1)} - 1$  يقبل القسمة على 7 إذن  $p_{n+1}$  صحيحة  
وبالتالي  $p_n$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي  $n$

$$\begin{aligned} \text{(2) لدينا } 2^{3n} - 1 &\equiv 0 \pmod{7} \text{ ومنه } 2^{3n} \equiv 1 \pmod{7} \\ \text{ومنه ينتج } 2^{3n+1} &\equiv 2 \pmod{7} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2^{3n+1} = 2 \pmod{7} \\ -2 = -2 \pmod{7} \end{cases} \text{ ينتج } 2^{3n+1} - 2 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\begin{cases} 2^{3n} = 1 \pmod{7} \\ 2^2 = 4 \pmod{7} \end{cases} \text{ من الجملة } 2^{3n+2} \equiv 4 \pmod{7} \text{ ينتج } 2^{3n+2} - 4 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\begin{cases} 2^{3n+2} = 4 \pmod{7} \\ -4 \equiv -4 \pmod{7} \end{cases} \text{ من الجملة } 2^{3n+2} - 4 \equiv 0 \pmod{7} \text{ ينتج } 2^{3n+2} - 4 \equiv 0 \pmod{7}$$

- (3) من أجل كل عدد طبيعي  $p$  لدينا  $p = 3n$  أو  $p = 3n + 1$  أو  $p = 3n + 2$   
إذا كان  $p = 3n$  فإن  $2^p = 1 \pmod{7}$   
إذا كان  $p = 3n + 1$  فإن  $2^p = 2 \pmod{7}$   
إذا كان  $p = 3n + 2$  فإن  $2^p = 4 \pmod{7}$

## تطبيق 11

## قابلية القسمة

عدد طبيعي  $n$ 

- (1) بين أن العددين  $A = n^2 + 5n + 4$  و  $B = n^2 + 3n + 2$  يقبلان القسمة على  $n + 1$   
(2) عين مجموعة قيم  $n$  التي من أجلها يكون العدد  $C = 3n^2 + 15n + 19$  قابلاً للقسمة على  $n + 1$   
(3) استنتج أنه مهما يكن  $n$  فإن العدد  $3n^2 + 15n + 19$  غير قابل للقسمة على  $n^2 + 3n + 2$ .

✓ الحل

- (1) لدينا  $n^2 + 5n + 4 = (n+1)(n+4)$  و  $n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$  ومنه  $n + 1$  يقسم كل من  $n^2 + 5n + 4$  و  $n^2 + 3n + 2$   
(2) لدينا  $3n^2 + 15n + 19 = (n+1)(3n+12) + 7$  حتى يقبل العدد  $3n^2 + 15n + 19$  يجب أن يقبل العدد 7 القسمة على  $n + 1$   
أي  $n + 1$  ينتمي إلى  $\{1, 7\}$   
إذن القيم الممكنة لـ  $n$  هي 0، 6  
(3) من أجل كل عدد طبيعي  $n \neq 0$  و  $n \neq 6$  لدينا:  
 $3n^2 + 15n + 19$  لا يقبل القسمة على  $n + 1$   
وبالتالي لا يقبل القسمة على  $n^2 + 3n + 2$   
من أجل  $n = 0$  يكون  $A = 2$  و  $C = 19$  و 2 لا يقسم 19  
من أجل  $n = 6$  يكون  $A = 56$  و  $C = 217$  و 56 لا يقسم 217  
إذن مهما يكن العدد الطبيعي  $n$  فإن  $A$  لا يقسم  $C$



## تطبيق 12

استعمال الموافقة لإثبات قابلية قسمة عدد على عدد ثابت

- (1) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ  $U_n = 5n^2 + n$   
 (1-1) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$   
 $U_{n+1} - U_n = 3[5n(n+1) + 2]$   
 (ب) بين بالتراجع أنه من أجل كل  $n$  فإن  $U_n$  يقبل القسمة على 6.  
 (2) باستعمال الموافقة بين أنه من أجل كل  $n$  فإن  $U_n$  يقبل القسمة على 6

الحل

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= [5(n+1)^2 + (n+1)] - [5n^2 + n] \\ &= 5[(n+1)^2 - n^2] + 1 \\ &= 5[(n+1)^2 + (n+1)n + n^2] + 1 \\ &= 5[3n^2 + 3n + 1] + 1 \\ &= 3[5n(n+1) + 2] \end{aligned}$$

- (ب) نسمي  $P_n$  الخاصية " $U_n$  يقبل القسمة على 6"  
 $P_0$  صحيحة لأن  $U_0 = 0$  و  $0$  يقبل القسمة على 6  
 - نفرض أن  $P_n$  صحيحة أي  $U_n$  يقبل القسمة على 6  
 ونفرض أن  $P_{n+1}$  صحيحة أي  $U_{n+1}$  يقبل القسمة على 6  
 لدينا  $n(n+1)$  زوجي وبالتالي العدد  $5n(n+1) + 2$  يقبل القسمة على 2  
 إذن العدد  $3[5n(n+1) + 2]$  يقبل القسمة على 6  
 لدينا من السؤال (1)  $U_{n+1} = U_n + 3[5n(n+1) + 2]$   
 وبما أن مجموع عددين يقبلان القسمة على 6 هو عدد يقبل القسمة على 6 فإن  $P_{n+1}$  يقبل القسمة على 6.  
 إذن  $P_{n+1}$  صحيحة وبالتالي  $P_n$  صحيحة من أجل كل  $n$   
 كل عدد طبيعي  $n$  يكتب على الشكل  $n = 6p + r$  مع  $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$   
 الجدول التالي يبين بواقي قسمة  $U_n$  على 6 من أجل كل قيم  $n$  السابقة:

باقي قسمة $n$ على 6	0	1	2	3	4	5
باقي قسمة $5n^2$ على 6	0	5	4	3	2	1
باقي قسمة $U_n$ على 6	0	0	0	0	0	0

من الجدول نستنتج أنه مهما يكن العدد الطبيعي  $n$  فإن  $5n^2 + n$  يقبل القسمة على 6

## تطبيق 13

حل المعادلات باستعمال الموافقة

- (1) عين  $(p_1)$  مجموعة الأعداد الصحيحة  $x$  بحيث العدد  $n = x^2 + x - 2$  يقبل القسمة على 7.  
 (2) عين  $(p_2)$  مجموعة الأعداد الصحيحة  $x$  بحيث العدد  $n = x^2 + x - 2$  يقبل القسمة على 3.  
 (3)  $k$  عدد صحيح. تحقق أنه إذا كان  $x = 1 + 21k$  أو  $x = -2 + 21k$  فإن  $n$  يقبل القسمة على 42.

الحل

$$(1) \quad x^2 + x - 2 \equiv 0[7] \quad \text{تكافئ} \quad x^2 - 6x + 5 \equiv 0[7]$$

$$\text{تكافئ} \quad (x-1)(x-5) \equiv 0[7]$$

$$\text{تكافئ} \quad (x-1) \equiv 0[7] \quad \text{أو} \quad (x-5) \equiv 0[7]$$

$$\text{تكافئ} \quad x \equiv 1[7] \quad \text{أو} \quad x \equiv 5[7]$$

إذن مجموعة قيم  $x$  المطلوبة هي من الشكل  $7p+1$  أو  $7p+5$  مع  $p \in \mathbb{Z}$

$$(2) \quad x^2 + x - 2 \equiv 0[3] \quad \text{تكافئ} \quad x^2 - 2x + 1 \equiv 0[3]$$

$$\text{تكافئ} \quad (x-1)^2 \equiv 0[3]$$

$$\text{تكافئ} \quad x-1 \equiv 0[3]$$

$$\text{تكافئ} \quad x \equiv 1[3]$$

إذن مجموعة قيم  $x$  المطلوبة هي من الشكل  $3p'+1$  مع  $p' \in \mathbb{Z}$

$$(3) \quad \text{إذا كان } x = 1 + 21k \text{ فإن } x \equiv 1[7] \text{ و } x \equiv 1[3]$$

وفي هذه الحالة  $n \equiv 0[7]$  و  $n \equiv 0[3]$  وبما أن 7 و 3 أوليان فإن  $n \equiv 0[21]$

وبما أن  $n = x(x-2)$  و  $x(x+1)$  زوجي فإن  $n$  زوجي

وبالتالي  $n$  يقبل القسمة على  $2 \times 21$  أي يقبل القسمة على 42

بنفس الطريقة ثبت أن  $n \equiv 0[42]$  في حالة  $x = -2 + 21k$

## تطبيق 14

الموافقات وقابلية القسمة

عين الأعداد الطبيعية  $n$  بحيث  $8 \mid 7^n + 4n + 1$  (I)

الحل

$$\text{مهما يكن العدد الطبيعي } n \text{ فإن } 7^n \equiv (-1)^n[8]$$

$$\text{إذا كان } n \text{ زوجيا أي } n = 2p \text{ فإن } 7^n \equiv 1[8]$$



وبالتالي الموافقة (I) تكتب  $5n + 1 \equiv 0 [8]$  أي  $2p + 1 \equiv 0 [8]$  ومنه نجد  $2p \equiv 7 [8]$  وهذا خطأ كون  $2p$  زوجي و 7 فردي - إذا كان  $n$  فرديا أي  $n = 2p + 1$  فإن  $7^n \equiv -1 [8]$  وبالتالي الموافقة (I) تكتب  $3n + 1 \equiv 0 [8]$  ومنه نجد  $3p \equiv 4 [8]$  وبالقسمة على 2 نجد  $3p \equiv 2 [4]$   $9p \equiv 6 [4]$  تكافئ  $3p \equiv 2 [4]$  تكافئ  $p \equiv 2 [4]$  تكافئ  $p = 4k + 2$  مع  $k \in \mathbb{N}$  إذن  $n = 2(4k + 2) + 1 = 8k + 5$

### تطبيق 15

مجموعات الموافقات وقابلية القسمة

من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  نضع  $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}$  (1) بين أنه إذا كان  $U_n \equiv 0 [7]$  فإن  $3^n - 1 \equiv 0 [7]$  (ب) بين أنه إذا كان  $3^n - 1 \equiv 0 [7]$  فإن  $U_n \equiv 0 [7]$  ثم وباستعمال جدول الموافقات استنتج أن  $U_n \equiv 0 [7]$  (2) استنتج قيم  $n$  التي من أجلها  $U_n \equiv 0 [7]$

### الحل

(1)  $U_n$  مجموعة  $n$  حد الأولى من حدود متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها 3

وبالتالي  $U_n = \frac{3^n - 1}{2}$

إذا كان  $U_n \equiv 0 [7]$  فإن  $2U_n \equiv 0 [7]$  وبما أن  $2U_n = 3^n - 1$  فإن  $3^n - 1 \equiv 0 [7]$

(ب) بما أن  $2U_n = 3^n - 1$  و  $3^n - 1 \equiv 0 [7]$  فإن  $2U_n \equiv 0 [7]$

باقي قسمة $U_n$ على 7	0	1	2	3	4	5	6
باقي قسمة $2U_n$ على 7	0	2	4	6	1	3	5

من الجدول نستنتج أنه إذا كان  $2U_n \equiv 0 [7]$  فإن  $U_n \equiv 0 [7]$

(2)  $U_n \equiv 0 [7]$  تكافئ  $3^n - 1 \equiv 0 [7]$  تكافئ  $3^n \equiv 1 [7]$

إذن لمعرفة قيم  $n$  ندرس باقي قسمة  $3^n$  على 7

$3^0 \equiv 1 [7]$  ،  $3^1 \equiv 3 [7]$  ،  $3^2 \equiv 2 [7]$  ،  $3^3 \equiv 6 [7]$  ،

$3^4 \equiv 4 [7]$  ،  $3^5 \equiv 5 [7]$  ،  $3^6 \equiv 1 [7]$

إذن البواقي تشكل متتالية دورية دورها 6 وبالتالي  $3^n \equiv 1 [7]$  يكافئ  $n = 6k$  مع  $k \in \mathbb{N}$  وعليه مجموعة قيم  $n$  التي من أجلها يكون  $U_n \equiv 0 [7]$  هي من الشكل  $6k$  حيث  $k \in \mathbb{N}$

### تطبيق 16

تعيين رقم أحاد عدد طبيعي

(1) ادرس حسب قيم  $n$  باقي قسمة  $7^n$  على 10  
(2) من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نضع  $A = 1 + 7 + \dots + 7^n$  ما هو رقم أحاد  $A$  ؟

### الحل

(1)  $7^0 \equiv 1 [10]$  ،  $7^1 \equiv 7 [10]$  ،  $7^2 \equiv 9 [10]$  ،  $7^3 \equiv 3 [10]$  ،  $7^4 \equiv 1 [10]$

إذن بواقي قسمة  $7^n$  على 10 تشكل متتالية دورية دورها 4

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $n = 4p + r$  حيث  $r \in \{0, 1, 2, 3\}$

من أجل كل  $p$  من  $\mathbb{N}$  لدينا ،

$7^{4p} \equiv 1 [10]$  تستلزم  $7^4 \equiv 1 [10]$

- من أجل  $n = 4p$  يكون  $7^n \equiv 1 [10]$

- من أجل  $n = 4p + 1$

$\begin{cases} 7^{4p} \equiv 1 [10] \\ 7^1 \equiv 7 [10] \end{cases}$  ومنه ينتج  $7^{4p+1} \equiv 7 [10]$  أي  $7^n \equiv 7 [10]$

- من أجل  $n = 4p + 2$

$\begin{cases} 7^{4p} \equiv 1 [10] \\ 7^2 \equiv 9 [10] \end{cases}$  ومنه ينتج  $7^n \equiv 9 [10]$

- من أجل  $n = 4p + 3$

$\begin{cases} 7^{4p} \equiv 1 [10] \\ 7^3 \equiv 3 [10] \end{cases}$  ومنه ينتج  $7^{4p+3} \equiv 3 [10]$  أي  $7^n \equiv 3 [10]$

(2) إذا كان  $n = 4p$  فإن  $A = 1 + 7 + \dots + 7^{4p}$

$A = 1 + 7 + \dots + 7^{4p}$

$A = (1 + 7^1 + 7^2 + 7^3 + \dots + (7^{4p-4} + 7^{4p-3} + 7^{4p-2} + 7^{4p-1}) + 7^{4p}$



$$A = \underbrace{20 + 20 + \dots + 20}_{\text{مرة}} + 1 [10]$$

$$A \equiv 1 [10]$$

إذن رقم آحاد  $A$  هو 1

- إذا كان  $n = 4p + 1$  فإن:

$$A = (1 + 7^1 + 7^2 + 7^3 + \dots + \underbrace{7^{4p-4} + 7^{4p-3} + 7^{4p-2} + 7^{4p-1}}_P) + 7^{4p} + 7^{4p+1}$$

$$A \equiv \underbrace{20 + 20 + \dots + 20 + 1 + 7}_{[10]}$$

$$\text{ومنه } A \equiv 8 [10]$$

وبالتالي رقم آحاد  $A$  هو 8

بنفس الطريقة إذا كان  $n = 4p + 2$  نجد رقم آحاد  $A$  هو 7

وإذا كان  $n = 4p + 3$  فإن رقم آحاد  $A$  هو 0

### تطبيق 17

نريد كتابة عدد طبيعي غير معلوم يكتب  $4 \times 3^x$  ويكتب  $x30$

(1) عين الرقم  $x$  ثم أحسب  $n$  في النظام العشري

(2) عين أساس نظام التعداد الذي يكون فيه  $132^y = 53^y + 46^y$  واحسب في

هذا النظام  $16^y \times 32^y$

الحل

$$(1) \text{ لدينا } n = 3 + 5x + 4 \times 3^x$$

ومن جهة أخرى لدينا  $n = 0 + 3 \times 9 + x \times 9^2$

$$\text{إذن } 3 + 5x + 100 = 27 + 81x \quad x = 1$$

$$\text{إذن } n = 130^0 = 413^5$$

- كتابة  $n$  في النظام العشري:

$$n = 130^0 = 0 + 3 \times 9 + 1 \times 9^2 = 27 + 81 = 108$$

$$(2) \text{ تكافئ } \begin{cases} y^2 + 3y + 2 = 6 + 4y + 3 + 5y \\ y > 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 132^y = 53^y + 46^y \\ y > 6 \end{cases}$$

$$46$$

$$\times 32$$

$$125$$

$$204$$

$$2165$$

### تطبيق 18

ليكن  $a$  عدد طبيعي أكبر تماماً من 2 ولدينا العددين التاليان:

$$x = 2(a-1) \text{ و } y = (a-1)^2$$

(1) اكتب  $x$  و  $y$  في نظام التعداد ذو الأساس  $a$

(2) تحقق من أن  $x$  و  $y$  يتألفان من نفس الأرقام وبترتيب معاكس.

الحل

$$(1) \text{ لدينا فرضاً } a > 2 \text{ إذن يمكننا وضع } a = 2 + \alpha \text{ حيث } \alpha > 0$$

$$-a + \alpha = -2 \quad \text{يكافئ} \quad a = 2 + \alpha$$

$$x = 2a - 2 = 2a - a + \alpha = a + \alpha$$

$$= \alpha \times a^0 + 1 \times a^1 = \overline{1\alpha}^a$$

$$y = a^2 - 2a + 1 = a^2 + (-a + \alpha)a + 1$$

$$y = \alpha a + 1 = \overline{\alpha 1}^a$$

(2) من السؤال (1) نستنتج أن  $x$  و  $y$  يتألفان من الرقمين 1 و  $\alpha$  بترتيب معاكس.

### تطبيق 19

لتكن  $x, y, z$  ثلاثة أعداد طبيعية حيث  $y = 131^x$  و  $z = 101^x$

(1) بين أنه يمكن كتابة الجداء  $xyz$  في الأساس  $x$  وذلك بدون معرفة  $x$ .

(2) عين الأعداد الطبيعية  $x, y, z$  علماً أن  $x + y + z = 50$

الحل

$$(1) \text{ لدينا } y = 1 + 3x + x^2 \text{ و } z = 1 + x^2$$

$$xyz = x(1 + 3x + x^2)(1 + x^2)$$

$$= x^3 + 3x^4 + x^5 + x + 3x^2 + x^3$$

$$= x + 3x^2 + 2x^3 + 3x^4 + x^5$$

$$= \overline{132310}^x$$

(2) بتعويض  $y$  و  $z$  في المساواة  $x + y + z = 50$  نجد:

$$2x^2 + 4x - 48 = 0 \quad \text{أي} \quad x + 1 + 3x + x^2 + 1 + x^2 = 50$$

$$\text{وبعد حل هذه المعادلة نجد } x = 4 \quad \text{إذن } y = 29 \text{ و } z = 17$$



## تطبيق 20

حل معادلة ذات ثلاثة مجاهيل صحيحة

- $x$  و  $y$  عدنان صحيحان ،  
 (1) أوجد بواقي قسمة  $x^2 - 3y^2$  على 4 .  
 (2) هل توجد ثلاثة أعداد صحيحة  $x, y, z$  بحيث  $x^2 - 3y^2 + 4z = 3$  ؟

✓ الحل

- (1) نضع  $a = x^2 - 3y^2$   
 بما أن  $x$  و  $y$  صحيحان إما أن يكونا زوجيين أو فرديين أو أحدهما فرديا والآخر زوجيا .  
 - الحالة الأولى  $x$  و  $y$  زوجيان :  
 $x = 2k_1$  و  $y = 2k_2$  ومنه  $a = 4k_1^2 - 12k_2^2$  إذن  $a \equiv 0 [4]$   
 - الحالة الثانية  $x$  و  $y$  فرديان :  
 $x = 2k_1 + 1$  و  $y = 2k_2 + 1$  ومنه  $a = 4k_1^2 + 4k_1 - 12k_2^2 - 12k_2 - 2$  إذن  $a \equiv 2 [4]$   
 - الحالة الثالثة  $x$  فردي و  $y$  زوجي :  
 $x = 2k_1 + 1$  و  $y = 2k_2$  ومنه  $a = 4k_1^2 + 4k_1 + 1 - 12k_2^2$  إذن  $a \equiv 1 [4]$   
 - الحالة الرابعة  $x$  زوجي و  $y$  فردي :  
 $x = 2k_1$  و  $y = 2k_2 + 1$  ومنه  $a = 4k_1^2 - 12k_2^2 - 12k_2 - 3$  إذن  $a \equiv 1 [4]$   
 إذن مهما يكن العدنان الصحيحان  $x$  و  $y$  فإن بواقي قسمة  $x^2 - 3y^2$  على 4 هي 0، 1، 2 .  
 (2)  $x^2 - 3y^2 + 4z - 3 = 0 [4]$  يكافئ  $x^2 - 3y^2 \equiv 3 [4]$  وهذا تناقض .  
 إذن لا توجد ثلاثة أعداد صحيحة  $(x, y, z)$  بحيث  $x^2 - 3y^2 + 4z = 3$

## تطبيق 21

توظيف المواقفات لمعرفة عدد عناصر مجموعة

$x$  عدد تلاميذ قسم شعبية العلوم التحريبية حيث أنه إذا وضعناهم في مجموعات ذات عنصرين بقي لنا تلميذ واحد ،  
 وإذا وضعناهم في مجموعات ذات ثلاثة عناصر أو خمسة بقي لنا تلميذان .  
 - أوجد  $x$  مع العلم أن  $18 < x < 48$  .

✓ الحل

من المعطيات يمكن أن نضع :

- (1)  $x \equiv 1 [2]$  .....  
 (2)  $x \equiv 2 [3]$  .....  
 (3)  $x \equiv 2 [5]$  .....

$x \equiv 1 [2]$  يكافئ  $15x = 15 [30]$  لأن  $PGCD(15, 2) = 1$   
 $x \equiv 2 [3]$  يكافئ  $10x = 20 [30]$  لأن  $PGCD(10, 3) = 1$   
 $x \equiv 2 [5]$  يكافئ  $6x = 12 [30]$  لأن  $PGCD(6, 5) = 1$   
 بجمع المتوافقات طرفا لطرف نجد  $31x = 47 [30]$  أي  $x \equiv 17 [30]$   
 إذن  $x = 17 + 30k$  مع  $k \in \mathbb{N}^*$   
 بما أن  $18 < x < 48$  فإن  $1 < 30k < 31$  ومنه  $\frac{1}{30} < k < \frac{31}{30}$   
 ومنه  $k = 1$   
 إذن عدد التلاميذ هو  $x = 17 + 30k = 47$



# مَآرِنٌ وَمَسَائِلُ

- 1 - عين تبعا لقيم العدد الطبيعي  $n$  يواقي قسمة  $2^n$  على 11 ثم إستنتج باقي قسمة  $1993^{2008}$  على 11  
(2) بين أنه مهما يكن العدد الطبيعي  $n$  فإن العدد  $(1 - 2^{10n+8} - 4^{10n+1})$  يقبل القسمة على 11

- 2 - (1) عين تبعا لقيم العدد الطبيعي  $n$  يواقي قسمة  $7^n$  على 8  
(2) ما هي مجموعة الأعداد الطبيعية  $n$  التي من أجلها يكون  $0 \equiv 8 [7^n \times n + 4n + 1]$

- 3 - حل في  $Z \times Z$  المعادلة (1)  $3x - 7y = 5$  ..... (1)  
(2) لتكن الثنائية  $(x, y)$  حل للمعادلة (1). ما هي القيم الممكنة لـ  $y$  بحيث  $0 \equiv 5 [y]$   
(3) ليكن  $(d)$  مستقيم معادلته  $3x - 7y - 5 = 0$   
(أ) عين المجموعة  $(\gamma)$  مجموعة النقاط  $M(x, y)$  من  $(d)$  بحيث  $x$  و  $y$  صحيحان.  
(ب) عين المجموعة  $(\gamma_1)$  الجزئية من  $(\gamma)$  وبحيث  $OM^2 \equiv 3 [5]$  حيث  $M(x, y)$

- 4 - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن العدد  $2^{n+2} + 3^{2n+1}$  يقبل القسمة على 7

- 5 -  $n$ : عدد طبيعي يكتب  $y \ 43 \ x$  في النظام ذو الأساس 7  
عين الأرقام  $x, y$  بحيث  $0 \equiv 6 [n]$

- 6 - (1) برهن أن العدد  $[111] = 10^{6n+1} + 10^{3n+1} + 1 \equiv 0$   
(2) برهن أن العدد  $a$  يقبل القسمة على 7 وعلى 13 وهذا إذا كان  $n$  فرديا.  
(3) برهن أن العدد الطبيعي  $B = 10^{2n} + 10^{6n} + 10^{3n} + 1$  يقبل القسمة على 7 و 11 و 13 وهذا إذا كان  $n$  فرديا.  
يمكنك كتابة  $10^3 - 1 = 9 \times 111$  و  $10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13$

- 7 -  $a$ : عدد طبيعي يكتب  $\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n$  في النظام العشري  
(1) اكتب  $a$  على الشكل  $a = \alpha_0 + 10k$  مع  $k \in \mathbb{N}^*$   
(2) بين  $5a \equiv 5\alpha_0 - k [17]$   
(3) بين أن  $a \equiv 0 [17]$  يكافئ  $5\alpha_0 - k \equiv 0 [17]$

- 8 - ليكن  $n$  عددا طبيعيا.  
ما هو باقي قسمة  $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$  على 4 ؟

- 9 - بين أنه إذا كان  $n$  ليس مضاعفا لـ 3 فإن العدد  $1 + 5^n + 5^{2n}$  يقبل القسمة على 31

- 10 - (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  باقي قسمة  $5^n$  على 7  
(2) ليكن  $a_n = 16C_n^2 + 64C_n^3 + \dots + 4^n C_n^n$  مع  $n \geq 2$   
(أ) بين  $a_n = 5^n - 4 - 4n$   
(ب) أحسب المجموع  $S$  حيث  $S = a_2 + a_3 + \dots + a_n$   
هل توجد قيم لـ  $n$  بحيث  $0 \equiv 7 [a_n]$

- 11 - (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  يواقي قسمة  $7^n$  على 5  
(2) عين باقي قسمة  $1524^{1997}$  على 5.  
(3) أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S = \frac{1}{Ln 2} [Ln 4 + Ln 4^2 + \dots + Ln 4^n]$   
(4) عين قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث  $0 \equiv 5 [S + 4n^2 + 7 \cdot 4^n]$

- 12 - (1) عين حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  باقي قسمة الاقليدية للعدد  $5^n$  على 11  
(2) إستنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد  $(6^{2009} - 25^{1424} + 1)$  على 11  
(3) عين قيم العدد الطبيعي  $n$  حتى يكون العدد  $2 \times 27^{n+1} + 15 \times 16^n + 3456$  قابلا للقسمة على 11

- 13 - (1) تحقق أن العدد 7 يقسم الأعداد  $1 - 2^6, 1 - 3^6, 1 - 4^6$ ، و  $1 - 5^6$   
(2)  $n$ : عدد طبيعي و  $S_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$   
برهن أن  $S_{n+1} - S_n$  يقبل القسمة على 7  
(3)  $n$ : عدد طبيعي و 5 باقي قسمته على 6.  
برهن أن  $7 [S_n] \equiv S_r$